PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

La clarté de la rédaction sera un élément déterminant dans l'appréciation de la copie. L'attention des candidats est attirée sur le fait que les démonstrations approximatives ou inutilement longues ne seront pas prises en considération.

Un résultat non démontré à une question peut être admis et utilisé dans la suite.

L'objet du problème est d'étudier la fonction définie, pour x réel, par :

$$(1) \qquad J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (x \sin t)\, dt$$

Cette fonction intervient dans la résolution de nombreux problèmes de Mécanique et de Physique.

I - DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE DE J.

1) Soit n un entier naturel. Etablir la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\, dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

2) A l'aide du développement en série entière de la fonction cosinus, montrer que J admet un développement en série entière sur $\mathbb{R}$, et expliciter ce développement.

La fonction J est paire. Dans toute la suite du problème son étude est limitée à l'intervalle $I =]0, \infty[$. De manière évidente $J(0) = 1$ et $|J| \leqslant 1$.

II - ENCADREMENT DU PLUS PETIT ZERO POSITIF DE J.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in I$, on considère la série alternée et absolument convergente

$$R_n(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

Que peut-on dire des signes respectifs de $R_2(x)$ et $R_3(x)$, pour x dans l'intervalle $]0,6[$? En déduire, sur cet intervalle, un encadrement de J par deux polynômes de degré au plus égal à quatre .

4) Montrer que

i) J est strictement positive sur l'intervalle $[0, 2]$;

ii) J s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]2, 2\sqrt{2}[$.

5) Calculer la dérivée J' de J à partir de la définition (1). Déterminer son signe sur l'intervalle $]0, \pi]$.

6) Montrer que J ne possède qu'un seul zéro dans l'intervalle $]2, 2\sqrt{2}[$. Dans la suite ce zéro est noté μ_0. Sa valeur numérique, voisine de 2,4 , le situe approximativement au milieu de l'intervalle.

III - EQUATION DIFFERENTIELLE SATISFAITE PAR J.

7) Ecrire J' et J + J" sous forme d'intégrales sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis montrer que J est solution sur I de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

8) On se propose de prouver que l'étude de l'équation (E) peut se ramener à celle d'une équation de la forme

$$(E') \qquad u'' + K u = 0$$

où K est une fonction continue sur I.

Tournez la page S. V. P.

On pose à cet effet $y = x^\gamma u$, où γ est réel.
Déterminer γ et K de telle sorte que les assertions suivantes soient équivalentes :
i) y est solution de (E)
ii) u est solution de (E')

9) Soit f une solution sur I de l'équation différentielle

$$f'' + K f = 0, \qquad \text{avec} \quad K(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$$

Calculer la dérivée de $f'^2 + K f^2$, puis montrer que f et f' sont bornées sur tout intervalle $[\alpha, \infty[$, avec $\alpha > 0$. Pour chaque valeur $\alpha > 0$, montrer l'existence d'une constante $M_\alpha > 0$, tel que

$$|J(x)| \leqslant \frac{M_\alpha}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in [\alpha, \infty[$$

IV - COMPARAISON A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient K_1 et K_2 deux fonctions continues sur I. On considère sur I les deux équations différentielles

$$(E'_1) \qquad u''_1 + K_1 u_1 = 0$$

$$(E'_2) \qquad u''_2 + K_2 u_2 = 0$$

Soit [a, b], avec a < b, un intervalle inclus dans I.
On suppose que

$$\forall x \in]a, b[, \quad K_2(x) < K_1(x)$$

Soient u_1 et u_2 deux fonctions de classe C^2 sur I, respectivement solutions des équations (E'_1) et (E'_2).
On suppose que u_1 et u_2 vérifient :

i) $u_1(a) = u_2(a) = 0$
ii) $u'_1(a) = u'_2(a)$
iii) $\forall x \in]a, b[, \ u_1(x) \neq 0$.

L'objet de cette quatrième partie est d'établir que
a) sur l'intervalle]a, b[, u_1 et u_2 ont le même signe
b) sur l'intervalle]a, b], $|u_1| < |u_2|$.

10) Montrer que $u'_1(a) \neq 0$.

Sur l'intervalle [a, b[, on introduit les fonctions φ et ψ, définies par :

$$\varphi(a) = 1, \quad \varphi(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)} \qquad \forall x \in]a, b[$$

$$\psi(x) = u_1(x)\, u'_2(x) - u_2(x)\, u'_1(x) \qquad \forall x \in [a, b[$$

11) Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ c \in [a, b[\ ; \ \forall x \in [a, c], \ \varphi(x) > 0 \right\}$$

est un intervalle non réduit au point a.

12) Soit $c \in \mathcal{C}$, avec c > a. Montrer que ψ est strictement croissante sur [a, c]. Que peut-on en déduire pour φ ?

13) Montrer que $\mathcal{C} = [a, b[$.

14) En déduire le résultat de comparaison :
i) sur l'intervalle]a, b[, u_1 et u_2 ont le même signe
ii) sur l'intervalle]a, b], $|u_1| < |u_2|$

15) Expliciter le résultat de comparaison, lorsque

i) $\forall x \in]a, b[, \quad K_2(x) = \alpha^2$, avec $\alpha > 0$
ii) $\forall x \in]a, b[, \quad K_1(x) = \beta^2$, avec $\beta > 0$

V - ETUDE SOMMAIRE DES VARIATIONS DE J.

16) Montrer que tout intervalle borné de I ne peut contenir qu'un nombre fini de zéros de J.

Tournez la page S. V. P.

17) Soit μ un zéro (positif) de J. Montrer, à l'aide du théorème de comparaison, que

i) J s'annule dans l'intervalle $]\mu, \mu + \pi[$,

ii) J ne s'annule pas dans l'intervalle $]\mu, \left(1+\frac{2\pi}{\sqrt{1+4\mu^2}}\right)\mu]$.

Ce résultat indique que l'ensemble des zéros (positifs) de J peut être rangé en une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, telle que

i) $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = +\infty$

ii) $\lim (\mu_{n+1} - \mu_n) = \pi$

18) Soit μ_n un zéro (positif) de J, tel que sur l'intervalle $[\mu_n, \mu_{n+1}]$ la fonction J soit positive. Montrer qu'il existe un et un seul point ν_n de l'intervalle $]\mu_n, \mu_{n+1}[$ tel que

a) sur $[\mu_n, \nu_n]$, J est strictement croissante ;
b) sur $[\nu_n, \mu_{n+1}]$, J est strictement décroissante.

Indication : utiliser le fait que J est solution sur I de l'équation différentielle suivante, déduite de (E) :

$$x\,J'' + J' = -\,x\,J$$

19) Montrer que la suite $(|J(\nu_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$, formée des extrema successifs de la valeur absolue de J sur I converge vers zéro.

20) Montrer que la suite $(|J(\nu_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante

21) Donner l'allure de la courbe représentative de J sur $\mathbb{R}$.

Les résultats indiqués maintenant NE SONT PAS A DEMONTRER. Ils sont simplement fournis au candidat pour information.

a) Le théorème de comparaison subsiste lorsque les conditions au point a :

$$u_1(a) = u_2(a) = 0 \qquad u'_1(a) = u'_2(a)$$

sont remplacées par les conditions au point b :

$$u_1(b) = u_2(b) = 0 \qquad u'_1(b) = u'_2(b)$$

b) La suite de terme général $\mu_{n+1} - \mu_n$ est strictement croissante.

c) Entre deux zéros consécutifs μ_n et μ_{n+1} de J, la courbe représentative de J possède un et un seul point d'inflexion situé dans l'intervalle $]\nu_n, \mu_{n+1}[$.